数理解析研究所講究録
第 1662 巻 2009 年 195-210

AKNS-ASDYM 階層とパンルヴェ方程式

筧 三郎 (Saburo Kakei) 立教大理
菊地 哲也 (Tetsuya Kikuchi) 東大数理

1 はじめに

AKNS 階層とは Ablowitz-Kaup-Newell-Segur による, 2×2 行列係数の線形微分方程式の両立条件として定義されるソリトン方程式系であり, 非線形シュレーディンガー (NLS) 方程式などを含む [1]. また, ASDYM というのは anti-self-dual Yang-Mills 方程式のことである. ここでいう AKNS-ASDYM 階層とは, その両方の方程式系を含む偏微分方程式系であり, 筧・池田・高崎により定義された "$2+1$ 次元 NLS 階層" [7] と同じものである. この偏微分方程式系に制限条件を加えると, 神保・三輪による 6 種類のパンルヴェ方程式に付随する線形問題 [5] のうちの 5 つが得られることが現時点でわかっている. このうち Painlevé III, IV が AKNS 階層の相似簡約で得られることは神保・三輪 [6] により, Painlevé VI と ASDYM の関係は Mason-Woodhouse [9] らにより知られているが, 本稿ではこれらの結果を含む形で一般的な定式化を行い, $2+1$ 次元 NLS 方程式の相似簡約で Painlevé V 型方程式が得られることを示す. また, その応用として Tracy-Widom による Painlevé 方程式の行列積分解 [13] が再構成できることを最後に注意する.

2 AKNS 階層の構成

はじめに AKNS 階層を構成する. 戸田階層についての高崎の教科書 [12] 第 3 章にあるように, ソリトン方程式系を構成するには Lax 形式, Sato-Wilson 形式, Hirota 形式という三つの異なる記述形式があるが, ここでは Sato-Wilson 形式による構成を行う. AKNS 階層は 2×2 行列係数の線形微分作用素 (Lax 作用素) を基本的な変数と考えて方程式系を構成することが多いが, Sato-Wilson 形式では, より基本的な変数である線形方程式系の形式解 (波動関数) に時間発展を与える.

まず次のような形の 2×2 行列 W, $\bar{W}$ を考える.

$$W := I + W_1\zeta^{-1} + W_2\zeta^{-2} + W_3\zeta^{-3} + \cdots \tag{1}$$

$$\bar{W} := G\hat{W} = G\left(I + \bar{W}_1\zeta + \bar{W}_2\zeta^2 + \cdots\right) \tag{2}$$

ここで ζ はパラメータ, $G \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ とし, 特に

$$W_1 = \begin{bmatrix} w & q \\ r & -w \end{bmatrix}, \qquad \bar{W}_1 = \begin{bmatrix} \bar{w} & \bar{q} \\ \bar{r} & -\bar{w} \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{3}$$

とおく. 設定をより詳しく言うと, アフィン・リー環 $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{sl}}_2 = \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$ の homogeneous gradation に関する分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{<0} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{>0}$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathbb{C}c$, $\mathfrak{g}_{>0} = \mathfrak{sl}_2 \otimes \zeta\mathbb{C}[\zeta]$, $\mathfrak{g}_{<0} = \mathfrak{sl}_2 \otimes \zeta^{-1}\mathbb{C}[\zeta^{-1}]$ を考えたとき, $W \in \exp(\mathfrak{g}_{<0})$, $\hat{W} \in \exp(\mathfrak{g}_{>0})$ という場合を考える. よって W_j, $\bar{W}_j$ $(j = 2, 3, \dots)$ はトレース0ではない. とにかく $W_j, G, \bar{W}_j$ の成分が後に定義する方程式系の従属変数となる. さらに $H_n := \begin{bmatrix} \zeta^n & 0 \\ 0 & -\zeta^n \end{bmatrix}$ とおき, 行列 L, $\bar{L}$ を

$$L := WH_0W^{-1} = H_0 + U_1\zeta^{-1} + U_2\zeta^{-2} + U_3\zeta^{-3} + \cdots \in \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{<0} \tag{4}$$

$$\bar{L} := \bar{W}H_0\bar{W}^{-1} = \bar{U}_0 + \bar{U}_1\zeta + \bar{U}_2\zeta^2 + U_3\zeta^3 + \cdots \in \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{>0} \tag{5}$$

で定義する. U_j, $\bar{U}_j$ はそれぞれ W, $\bar{W}$ を用いて書き下すことができるが, 特に U_j は W_k の成分を次数 k と数えたとき, j 次同次式である. これは定義 (4) を $LW = WH_0$ と表示し, 両辺の ζ のべきを比較すれば確かめられる. たとえば

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2q \\ 2r & 0 \end{bmatrix}, \qquad U_2 = \begin{bmatrix} 2qr & -2w_{12}^{(2)} - 2qw \\ 2w_{21}^{(2)} - 2rw & -2qr \end{bmatrix}. \tag{6}$$

ここで $w_{12}^{(2)}, w_{21}^{(2)}$ はそれぞれ W_2 の 12 成分, 21 成分である. $\bar{U}_j$ も同様な同次性があり, G の成分を 0 次, $\bar{W}_k$ の成分を $-k$ 次と数えると $-j$ 次の同次式になる $(j, k > 0$ とする$)$. たとえば

$$\bar{U}_0 = GH_0G^{-1} = \begin{bmatrix} ad + bc & -2ab \\ 2cd & -ad - bc \end{bmatrix}, \qquad \bar{U}_1 = G\begin{bmatrix} 0 & -2\bar{q} \\ 2\bar{r} & 0 \end{bmatrix}G^{-1} \tag{7}$$

である. $\bar{U}_0$ を与えるのに $\det G = 1$ を用いていることに注意.

さて, 独立変数 $t = (t_1, t_2, \dots)$, $\bar{t} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots)$ による W, $\bar{W}$ の時間発展を, 次の Sato-Wilson 方程式で定義する:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t_n} = B_nW - WH_n = -B_n^cW \\ \dfrac{\partial W}{\partial \bar{t}_n} = \bar{B}_nW \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{W}}{\partial t_n} = B_n\bar{W} \\ \dfrac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{t}_n} = \bar{B}_n\bar{W} - \bar{W}H_{-n} = -\bar{B}_n^c\bar{W} \end{cases} \tag{8}$$

ここで

$$B_n := (\zeta^nL)_{\geq 0} = H_n + U_1\zeta^{n-1} + \cdots + U_n, \qquad B_n^c := \zeta^nL - B_n,$$
$$\bar{B}_n := (\zeta^{-n}\bar{L})_{<0} = \bar{U}_0\zeta^{-n} + \bar{U}_1\zeta^{-n+1} + \cdots + \bar{U}_{n-1}\zeta^{-1}, \qquad \bar{B}_n^c := \zeta^{-n}\bar{L} - \bar{B}_n$$

である. B_n, $\bar{B}_n$ の定義にある行列の右下の ≥ 0 は ζ の非負べきの部分を取り出すという意味で, < 0 は ζ の負べきの部分を取り出すという意味である. 特に従属変数 (3) の W_1 と G の満たす方程式系が重要なので改めて述べておく:

- 方程式系 (8) のうち, W の t_n 微分と $\bar{t}_n$ 微分において ζ^{-1} の係数を見ると

$$\frac{\partial W_1}{\partial t_n} = -U_{1+n}, \qquad \frac{\partial W_1}{\partial \bar{t}_n} = \bar{U}_{n-1} \tag{9}$$

となる. よって q, r の t_n 微分は $n+1$ 次の変数 U_{n+1} となり, $\bar{t}_n$ 微分は $1-n$ 次の変数 $\bar{U}_{n-1}$ となるという同次性があることがわかる.

- 方程式系 (8) のうち, $\bar{W}$ の t_n 微分と $\bar{t}_n$ 微分において ζ^0 の係数をみると次を得る.

$$\frac{\partial G}{\partial t_n} = U_n G, \qquad \frac{\partial G}{\partial \bar{t}_n} = -\bar{U}_n G. \tag{10}$$

これらの方程式系のほとんどは従属変数 (3) で閉じていないが, $n=1$ のとき,

$$\frac{\partial W_1}{\partial \bar{t}_1} = \bar{U}_0, \qquad \frac{\partial G}{\partial t_1} = U_1 G, \qquad \frac{\partial G}{\partial \bar{t}_1} = -\bar{U}_1 G, \qquad \frac{\partial \bar{W}_1}{\partial t_1} = G^{-1} H_0 G$$

の 4 式は (3) で閉じている. 成分で表せば

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}_1}\begin{bmatrix} w & q \\ r & -w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad+bc & -2ab \\ 2cd & -ad-bc \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial}{\partial t_1}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2qc & -2qd \\ 2ra & 2rb \end{bmatrix},$$
$$\frac{\partial}{\partial t_1}\begin{bmatrix} \bar{w} & \bar{q} \\ \bar{r} & -\bar{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad+bc & 2bd \\ -2ac & -ad-bc \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{t}_1}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\bar{r}b & 2\bar{q}a \\ -2\bar{r}d & 2\bar{q}c \end{bmatrix}$$

である. この方程式系 ($w, \bar{w}, \bar{q}, \bar{r}$ は関係式より消去できる) を Pohlmeyer- Lund-Regge 方程式といい, 相似簡約により Painlevé III 型方程式となることが知られている [6].

Sato-Wilson 方程式により, 行列 L は次の Lax 方程式を満たすことがわかる:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial t_n} = [B_n, L] = -[B_n^c, L] \\ \dfrac{\partial L}{\partial \bar{t}_n} = [\bar{B}_n, L] \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{L}}{\partial t_n} = [B_n, \bar{L}] \\ \dfrac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{t}_n} = [\bar{B}_n, \bar{L}] = -[\bar{B}_n^c, L] \end{cases} \tag{11}$$

上で述べたように, Sato-Wilson 方程式は有限個の従属変数で閉じた方程式にはならないが, Lax 方程式により次がわかる.

定理 ([14] Theorem 3.10, [3] Chapter 9 参照) 行列 L (4) の成分は, 変数 q, r の t_1 に関する微分多項式で表示される. また, (5) で定義される行列 $\bar{L}$ の成分は, 変数 $\bar{q}, \bar{r}$ の $\bar{t}_1$ に関する微分多項式で表示される.

証明は, $\dfrac{\partial L}{\partial t_1} = [B_1, L]$ を ζ のべきで展開して得られる関係式

$$\frac{\partial U_j}{\partial t_1} = [H_0, U_{j+1}] + [U_1, U_j] \qquad (j = 1, 2, \dots) \tag{12}$$

と, $L^2 = W(H_0)^2W^{-1} = I$ より得られる関係式

$$H_0U_j + U_jH_0 + \sum_{i=1}^{j-1} U_iU_{j-i} = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots) \tag{13}$$

に (6) で定義される U_1 を代入して $j = 1$ の場合から順に (12), (13) を解くことにより帰納的に示せる. 結果のみいくつか述べると

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2q \\ 2r & 0 \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} 2qr & -q' \\ -r' & -2qr \end{bmatrix}, \quad U_3 = \begin{bmatrix} q'r - qr' & -\frac{q''}{2} - 4q^2r \\ \frac{r''}{2} + 4qr^2 & -q'r + qr' \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$U_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(qr'' + q''r - q'r') + 6q^2r^2 & -\frac{q'''}{4} - 6qq'r \\ -\frac{r'''}{4} - 6qrr' & -\frac{1}{2}(qr'' + q''r - q'r') - 6q^2r^2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

となる. ここで $'$ は t_1 に関する微分を表す. $\bar{L}$ についても同様に示せる.

この結果を Sato-Wilson 方程式 (9) に代入することにより, 変数 q, r の t_n 微分が得られる. たとえば t_2 微分, t_3 微分はそれぞれ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial t_2} = \dfrac{q''}{2} + 4q^2r \\ \dfrac{\partial r}{\partial t_2} = -\dfrac{r''}{2} - 4qr^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial t_3} = \dfrac{q'''}{4} + 6qq'r \\ \dfrac{\partial r}{\partial t_3} = \dfrac{r'''}{4} + 6qrr' \end{cases} \tag{16}$$

となる. t_2 微分は非線形シュレーディンガー方程式, t_3 微分は結合型変形 KdV 方程式というソリトン方程式である. このようにして得られる無限変数の偏微分方程式系を AKNS 階層という. また, 同じく Sato-Wilson 方程式より W_1 の対角成分 w が次を満たすこともわかる.

$$\frac{\partial w}{\partial t_1} = -2qr, \qquad \frac{\partial w}{\partial t_2} = -q'r + qr', \qquad \frac{\partial w}{\partial t_3} = -\frac{1}{2}(qr'' + q''r - q'r') - 6q^2r^2. \tag{17}$$

3　2 + 1 次元 NLS 階層

従属変数の行列 $W, \bar{W}$ (1), (2) に, さらに Sato-Wilson 方程式 (8) と両立するような時間発展を定義する. 論文 [7] で与えられたものと同じ方程式系であるが, ここでは擬微分作用素ではなく, 2×2 行列による定式化を行う. まず W と $\bar{W}$ の成分は独立変数 y_0, z_0 に依存すると仮定し, この変数に関する微分作用素から (4), (5) と同様な操作により Lax 作用素を定義する:

$$W \cdot \frac{\partial}{\partial y_0} \cdot W^{-1} = \frac{\partial}{\partial y_0} - \frac{\partial W}{\partial y_0}W^{-1}, \qquad W \cdot \frac{\partial}{\partial z_0} \cdot W^{-1} = \frac{\partial}{\partial z_0} - \frac{\partial W}{\partial z_0}W^{-1} \tag{18}$$

ここで左辺は作用素の合成を意味するので, L と $\bar{L}$ の定義 (4), (5) における H_0 を微分作用素に置き換えたことになる. 今, y_0 微分で定義された作用素の行列部分を

$$-\frac{\partial W}{\partial y_0}W^{-1} = V_1\zeta^{-1} + V_2\zeta^{-2} + V_3\zeta^{-3} + \cdots \in \mathfrak{g}_{<0},$$

とおくと, 係数 V_i は

$$V_1 = -\frac{\partial W_1}{\partial y_0} = -\frac{\partial}{\partial y_0}\begin{bmatrix} w & q \\ r & -w \end{bmatrix}, \tag{19}$$

$$V_2 = -\frac{\partial W_2}{\partial y_0} - V_1 W_1 = -\frac{\partial}{\partial y_0}\begin{bmatrix} w_{11}^{(2)} & w_{12}^{(2)} \\ w_{21}^{(2)} & w_{22}^{(2)} \end{bmatrix} + \left(\frac{\partial}{\partial y_0}\begin{bmatrix} w & q \\ r & -w \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} w & q \\ r & -w \end{bmatrix}$$

のように表すことができる. Lax 作用素 L の計算 (6) において「W_i と H_0 とのブラケットを取る」という操作を「W_i を y_0 で微分する」という操作に置き換えたことになる.

Lax 作用素 (18) を用いて W, $\bar{W}$ の変数 y_n, z_n $(n = 1, 2, \ldots)$ に関する時間発展を次で定義する.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial y_n} = \zeta^n \dfrac{\partial W}{\partial y_0} + C_n W = -C_n^c W \\ \dfrac{\partial \bar{W}}{\partial y_n} = \zeta^n \dfrac{\partial \bar{W}}{\partial y_0} + C_n \bar{W} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial z_n} = \zeta^n \dfrac{\partial W}{\partial z_0} + D_n W = -D_n^c W \\ \dfrac{\partial \bar{W}}{\partial z_n} = \zeta^n \dfrac{\partial \bar{W}}{\partial z_0} + D_n \bar{W} \end{cases} \tag{20}$$

ここで

$$C_n := \left(-\zeta^n \frac{\partial W}{\partial y_0} W^{-1}\right)_{\geq 0} = V_1 \zeta^{n-1} + \cdots + V_n, \qquad D_n := \left(-\zeta^n \frac{\partial W}{\partial z_0} W^{-1}\right)_{\geq 0}$$

とする. ここでも (3) 式の従属変数 W_1 と G の満たす方程式が基本的である. 方程式系 (20) の y_n に関する微分について ζ^{-1} と ζ^0 の係数をみると

$$\frac{\partial W_1}{\partial y_n} = -V_{n+1}, \qquad \frac{\partial G}{\partial y_n} = V_n G \tag{21}$$

を得る. 特に $n = 1$ のとき, (19) とあわせて

$$\frac{\partial G}{\partial y_1} = V_1 G = -\frac{\partial W_1}{\partial y_0} G, \qquad \frac{\partial G}{\partial z_1} = -\frac{\partial W_1}{\partial z_0} G \tag{22}$$

となるが, この関係式より (19) の行列 V_1 が $V_1 = -\dfrac{\partial W_1}{\partial y_0} = \dfrac{\partial G}{\partial y_1} G^{-1}$ と 2 通りに表示できることに注意する.

この場合も方程式系 (20) より次の Lax 方程式が成り立つことがわかる.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial y_n} = \zeta^n \dfrac{\partial L}{\partial y_0} + [C_n, L] \\ \dfrac{\partial L}{\partial z_n} = \zeta^n \dfrac{\partial L}{\partial z_0} + [D_n, L] \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{L}}{\partial y_n} = \zeta^n \dfrac{\partial \bar{L}}{\partial y_0} + [C_n, \bar{L}] \\ \dfrac{\partial \bar{L}}{\partial z_n} = \zeta^n \dfrac{\partial \bar{L}}{\partial z_0} + [D_n, \bar{L}] \end{cases} \tag{23}$$

特に L の y_n に関する微分方程式で ζ^{-1} の係数をみると

$$\frac{\partial U_1}{\partial y_n} = \frac{\partial U_{n+1}}{\partial y_0} + [V_1, U_n] + [V_2, U_{n-1}] + \cdots + [V_n, U_1] \tag{24}$$

となる. ここに定理で与えた U_j (14), (15) などを代入すれば, 従属変数 q, r の, 独立変数 y_n と t_1 に関する微分方程式が得られる. 例えば $n=1$ のとき

$$\frac{\partial U_1}{\partial y_1}=\frac{\partial U_2}{\partial y_0}+[V_1,U_1] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial y_1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 q}{\partial t_1 \partial y_0}-2q\dfrac{\partial w}{\partial y_0} \\ \dfrac{\partial r}{\partial y_1}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 r}{\partial t_1 \partial y_0}+2r\dfrac{\partial w}{\partial y_0} \end{cases} \tag{25}$$

である. ここで (17) で与えた関係式により w を消去すれば q, r のみで閉じた方程式

$$\frac{\partial q}{\partial y_1}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial t_1 \partial y_0}+4q\frac{\partial}{\partial y_0}\int qr dt_1, \qquad \frac{\partial r}{\partial y_1}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial t_1 \partial y_0}-4r\frac{\partial}{\partial y_0}\int qr dt_1 \tag{26}$$

が得られる. 方程式 (26) を $2+1$ 次元非線形シュレーディンガー方程式という. $y_0=t_1$, $y_1=t_2$ とすれば (16) 式の非線形シュレーディンガー方程式に一致する.

4 波動関数と零曲率方程式, ASDYM 階層

4 種の独立変数 $t=(t_1,t_2,\dots)$, $\bar{t}=(\bar{t}_1,\bar{t}_2,\dots)$, $y=(y_0,y_1,\dots)$, $z=(z_0,z_1,\dots)$ による時間発展 (8), (20) をみたすような W, $\bar{W}$ を用いて, 波動関数 $\Psi=\Psi(\zeta;\alpha,\gamma,\delta,t,\bar{t},y,z)$, $\bar{\Psi}=\bar{\Psi}(\zeta;\beta,\gamma,\delta,t,\bar{t},y,z)$ を次で定義する:

$$\Psi=W(\zeta;t,\bar{t},y,z)\zeta^{\alpha H_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}y_n\zeta^n\right)^{\gamma H_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}z_n\zeta^n\right)^{\delta H_0}\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}t_nH_n\right) \tag{27}$$

$$\bar{\Psi}=\bar{W}(\zeta;t,\bar{t},y,z)\zeta^{\beta H_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}y_n\zeta^n\right)^{\gamma H_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}z_n\zeta^n\right)^{\delta H_0}\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\bar{t}_nH_{-n}\right) \tag{28}$$

ここで $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ は複素パラメータとする. 定義より Ψ, $\bar{\Psi}$ は次を満たす.

$$L\Psi=\Psi H_0, \qquad \bar{L}\bar{\Psi}=\bar{\Psi}H_0.$$

さらに Sato-Wilson 方程式により $Y=\Psi,\bar{\Psi}$ は次の線形方程式系を満たすことがわかる.

$$\frac{\partial Y}{\partial t_n}=B_nY, \qquad \frac{\partial Y}{\partial \bar{t}_n}=\bar{B}_nY, \qquad \frac{\partial Y}{\partial y_n}=\zeta^n\frac{\partial Y}{\partial y_0}+C_nY, \qquad \frac{\partial Y}{\partial z_n}=\zeta^n\frac{\partial Y}{\partial z_0}+D_nY \tag{29}$$

これらは全て両立している. 変数の系列が t_n, $\bar{t}_n$, y_n, z_n の 4 種類あるので, その組み合わせとして 10 通りの零曲率方程式 (偏微分方程式系) が得られる. このうち y_m と z_n の両立条件として得られる方程式系を ASDYM 階層という. 具体的には

$$\left[\frac{\partial}{\partial y_n}-\zeta^n\frac{\partial}{\partial y_0}-C_n, \frac{\partial}{\partial z_m}-\zeta^m\frac{\partial}{\partial z_0}-D_n\right]=0 \tag{30}$$

$(m,n=1,2,3,\dots)$ で与えられる方程式系である. 特に $m=n=1$ のとき, (22) 式のところで注意したように

$$C_1\ (=V_1) = -\frac{\partial W_1}{\partial y_0} = \frac{\partial G}{\partial y_1}G^{-1}, \qquad D_1 = -\frac{\partial W_1}{\partial z_0} = \frac{\partial G}{\partial z_1}G^{-1}$$

と表せるので, 両立条件 (30) の ζ の係数より

$$\frac{\partial C_1}{\partial z_0} = \frac{\partial D_1}{\partial y_0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\partial G}{\partial y_1}G^{-1}\right) = \frac{\partial}{\partial y_0}\left(\frac{\partial G}{\partial z_1}G^{-1}\right) \tag{31}$$

が得られ, ζ^0 の係数より

$$\frac{\partial C_1}{\partial z_1} = [D_1, C_1] + \frac{\partial D_1}{\partial y_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 W_1}{\partial z_1 \partial y_0} = \left[\frac{\partial W_1}{\partial z_0}, \frac{\partial W_1}{\partial y_0}\right] + \frac{\partial^2 W_1}{\partial y_1 \partial z_0} \tag{32}$$

を得る. (31) がヤンの方程式である. なお (31) は W_1 で表すと trivial な関係式であり, (32) は G で表すと trivial になる. 今後は (32) を用いて議論する.

5 相似簡約

5.1 変数 $t, \bar{t}, y, z$ に関する対称性と相似条件

$\lambda \in \mathbb{C}$ とし, $t_\lambda := (\lambda t_1, \lambda^2 t_2, \dots)$, $\bar{t}_{\lambda^{-1}} := (\lambda^{-1}\bar{t}_1, \lambda^{-2}\bar{t}_2, \dots)$, $y_\lambda := (y_0, \lambda y_1, \lambda^2 y_2, \dots)$, $z_\lambda := (z_0, \lambda z_1, \lambda^2 z_2, \dots)$ とおき, 従属変数 W, $\bar{W}$ の λ による 1 パラメータ変形 W_λ, G_λ, $\hat{W}_\lambda$ を

$$W_\lambda(\zeta; t, \bar{t}, y, z) := \lambda^{\alpha H_0} W(\lambda^{-1}\zeta; t_\lambda, \bar{t}_{\lambda^{-1}}, y_\lambda, z_\lambda)\lambda^{-\alpha H_0}, \tag{33}$$

$$G_\lambda(t, \bar{t}, y, z) := \lambda^{\alpha H_0} G(t_\lambda, \bar{t}_{\lambda^{-1}}, y_\lambda, z_\lambda)\lambda^{-\beta H_0} \tag{34}$$

$$\hat{W}_\lambda(\zeta; t, \bar{t}, y, z) := \lambda^{\beta H_0} \hat{W}(\lambda^{-1}\zeta; t_\lambda, \bar{t}_{\lambda^{-1}}, y_\lambda, z_\lambda)\lambda^{-\beta H_0} \tag{35}$$

で定義する. このとき次が成り立つ.

命題 W, $\bar{W} = G\hat{W}$ が Sato-Wilson 方程式 (8), (20) を満たせば W_λ, $\bar{W}_\lambda = G_\lambda \hat{W}_\lambda$ も同じ方程式を満たす.

この命題は方程式の同次性より示せる. そこ自己相似条件

$$W = W_\lambda, \qquad \bar{W} = \bar{W}_\lambda \tag{36}$$

を満たすような解を考える. 条件 (36) を従属変数 (3) で具体的に表すと

$$\begin{aligned}
q(t_\lambda, \bar{t}_{\lambda^{-1}}, y_\lambda, z_\lambda) &= \lambda^{-2\alpha-1} q(t, \bar{t}, y, z), & r(t_\lambda, \bar{t}_{\lambda^{-1}}, y_\lambda, z_\lambda) &= \lambda^{2\alpha-1} r(t, \bar{t}, y, z),\\
w(t_\lambda, \bar{t}_{\lambda^{-1}}, y_\lambda, z_\lambda) &= \lambda^{-1} w(t, \bar{t}, y, z), & \bar{w}(t_\lambda, \bar{t}_{\lambda^{-1}}, y_\lambda, z_\lambda) &= \lambda^{-1} \bar{w}(t, \bar{t}, y, z),\\
\bar{q}(t_\lambda, \bar{t}_{\lambda^{-1}}, y_\lambda, z_\lambda) &= \lambda^{-2\beta-1} \bar{q}(t, \bar{t}, y, z), & \bar{r}(t_\lambda, \bar{t}_{\lambda^{-1}}, y_\lambda, z_\lambda) &= \lambda^{2\beta-1} \bar{r}(t, \bar{t}, y, z)\\
a(t_\lambda, \bar{t}_{\lambda^{-1}}, y_\lambda, z_\lambda) &= \lambda^{-\alpha+\beta} a(t, \bar{t}, y, z), & b(t_\lambda, \bar{t}_{\lambda^{-1}}, y_\lambda, z_\lambda) &= \lambda^{-\alpha-\beta} b(t, \bar{t}, y, z),\\
c(t_\lambda, \bar{t}_{\lambda^{-1}}, y_\lambda, z_\lambda) &= \lambda^{\alpha+\beta} c(t, \bar{t}, y, z), & d(t_\lambda, \bar{t}_{\lambda^{-1}}, y_\lambda, z_\lambda) &= \lambda^{\alpha-\beta} d(t, \bar{t}, y, z)
\end{aligned}$$

となる．このような自己相似条件のもとで，(27)，(28) で定義される波動関数 $Y = \Psi$, $\bar{\Psi}$ はいずれも

$$Y(\lambda\zeta; t, \bar{t}, y, z) = \lambda^{\alpha H_0} Y(\zeta; t_\lambda, \bar{t}_{\lambda^{-1}}, y_\lambda, z_\lambda), \tag{37}$$

を満たす．

自己相似条件を満たすような W に対しては，パラメータ（ソリトン方程式のスペクトル・パラメータ）ζ に関する微分が意味を持つ．このとき相似条件のパラメータ α, β は，Painlevé 方程式のパラメータ（モノドロミー指数）に対応する．(36) の両辺を λ で微分して $\lambda = 1$ とおき，Sato-Wilson 方程式 (8)，(20) を代入すれば，

$$\begin{aligned}
\zeta\frac{dW}{d\zeta} &= [\alpha H_0, W] + \sum_{n=1}^{\infty} nt_n \frac{\partial W}{\partial t_n} - \sum_{n=1}^{\infty} n\bar{t}_n \frac{\partial W}{\partial \bar{t}_n} + \sum_{n=1}^{\infty} ny_n \frac{\partial W}{\partial y_n} + \sum_{n=1}^{\infty} nz_n \frac{\partial W}{\partial z_n} \\
&= [\alpha H_0, W] - \sum_{n=1}^{\infty} nt_n B_n^c W - \sum_{n=1}^{\infty} n\bar{t}_n \bar{B}_n W \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} ny_n \left(C_n W + \zeta^n \frac{\partial W}{\partial y_0} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} nz_n \left(D_n W + \zeta^n \frac{\partial W}{\partial z_0} \right)
\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
\zeta\frac{d\bar{W}}{d\zeta} &= \alpha H_0 \bar{W} + \sum_{n=1}^{\infty} nt_n \frac{\partial \bar{W}}{\partial t_n} - \sum_{n=1}^{\infty} n\bar{t}_n \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{t}_n} + \sum_{n=1}^{\infty} ny_n \frac{\partial \bar{W}}{\partial y_n} + \sum_{n=1}^{\infty} nz_n \frac{\partial \bar{W}}{\partial z_n} - \bar{W}(\beta H_0) \\
&= \alpha H_0 \bar{W} + \sum_{n=1}^{\infty} nt_n B_n \bar{W} + \sum_{n=1}^{\infty} n\bar{t}_n \bar{B}_n^c \bar{W} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} ny_n \left(C_n \bar{W} + \zeta^n \frac{\partial \bar{W}}{\partial y_0} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} nz_n \left(D_n \bar{W} + \zeta^n \frac{\partial \bar{W}}{\partial z_0} \right) - \bar{W}(\beta H_0),
\end{aligned} \tag{39}$$

が得られる．また，(37) も λ で微分して $\lambda = 1$ とおけば線形方程式

$$\begin{aligned}
\zeta\frac{dY}{d\zeta} &= \left(\alpha H_0 + \sum_{n=1}^{\infty} nt_n B_n - \sum_{n=1}^{\infty} n\bar{t}_n \bar{B}_n + \sum_{n=1}^{\infty} ny_n C_n + \sum_{n=1}^{\infty} nz_n D_n \right) Y \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} ny_n \zeta^n \frac{\partial Y}{\partial y_0} + \sum_{n=1}^{\infty} nz_n \zeta^n \frac{\partial Y}{\partial z_0}
\end{aligned} \tag{40}$$

を得る．右辺は y_0, z_0 に関する微分を含んでいるが，もうひとつの相似条件をおくことにより Painlevé 方程式に付随する線形方程式が得られる．

5.2 変数 y_n, z_n の対称性と相似条件

上の命題で述べた 1 パラメータ変形に関する対称性の他に，方程式系 (8)，(20) には変数 y と z に関する対称性がある．そこで $\lambda y = (\lambda y_0, \lambda y_1, \lambda y_2, \dots)$, $\lambda z = (\lambda z_0, \lambda z_1, \lambda z_2, \dots)$

とおき, 自己相似条件

$$\begin{cases} W(\zeta;t,\bar{t},\lambda y,z) = \lambda^{\gamma H_0} W(\zeta;t,\bar{t},y,z)\lambda^{-\gamma H_0} \\ \bar{W}(\zeta;t,\bar{t},\lambda y,z) = \lambda^{\gamma H_0} \bar{W}(\zeta;t,\bar{t},y,z)\lambda^{-\gamma H_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} W(\zeta;t,\bar{t},y,\lambda z) = \lambda^{\delta H_0} W(\zeta;t,\bar{t},y,z)\lambda^{-\delta H_0} \\ \bar{W}(\zeta;t,\bar{t},y,\lambda z) = \lambda^{\delta H_0} \bar{W}(\zeta;t,\bar{t},y,z)\lambda^{-\delta H_0} \end{cases}$$

を課す. この右辺のような1パラメータ変形に対しても Sato-Wilson 方程式系 (8), (20) は不変なのでこの条件には意味がある. ここでも λ で微分して $\lambda = 1$ とおくと

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} y_n \frac{\partial W}{\partial y_n} = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \zeta^n \frac{\partial W}{\partial y_0} + \sum_{n=1}^{\infty} y_n C_n W = [\gamma H_0, W] \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} y_n \frac{\partial \bar{W}}{\partial y_n} = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \zeta^n \frac{\partial \bar{W}}{\partial y_0} + \sum_{n} y_n C_n \bar{W} = [\gamma H_0, \bar{W}] \end{cases} \tag{41}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z_n \frac{\partial W}{\partial z_n} = \sum_{n=0}^{\infty} z_n \zeta^n \frac{\partial W}{\partial z_0} + \sum_{n} z_n D_n W = [\delta H_0, W] \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z_n \frac{\partial \bar{W}}{\partial z_n} = \sum_{n=0}^{\infty} z_n \zeta^n \frac{\partial \bar{W}}{\partial z_0} + \sum_{n} z_n D_n \bar{W} = [\delta H_0, \bar{W}] \end{cases} \tag{42}$$

となるので, 相似条件 (41), (42) のもとで波動関数 $Y = \Psi, \bar{\Psi}$ はいずれも線形方程式

$$\frac{\partial Y}{\partial y_0} = \frac{\gamma H_0 - \sum_{n=1}^{\infty} y_n C_n}{\sum_{n=0}^{\infty} y_n \zeta^n} Y, \qquad \frac{\partial Y}{\partial z_0} = \frac{\delta H_0 - \sum_{n=1}^{\infty} z_n D_n}{\sum_{n=0}^{\infty} z_n \zeta^n} Y \tag{43}$$

を満たす.

以上のことから 3 つの相似条件を同時に満たす波動関数は (40), (43) より線形方程式

$$\begin{aligned} \zeta \frac{dY}{d\zeta} = \Big[& \alpha H_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n t_n B_n - \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{t}_n \bar{B}_n + \sum_{n=1}^{\infty} n y_n C_n + \sum_{n=1}^{\infty} n z_n D_n \\ & + \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n y_n \zeta^n}{\sum_{n=0}^{\infty} y_n \zeta^n} \left(\gamma H_0 - \sum_{n=1}^{\infty} y_n C_n \right) + \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n z_n \zeta^n}{\sum_{n=0}^{\infty} z_n \zeta^n} \left(\delta H_0 - \sum_{n} z_n D_n \right) \Big] Y \end{aligned} \tag{44}$$

を満たす. ここに制限条件をおけば Painlevé 方程式に付随する線形方程式 [5], [6], [11] となる. 以下独立変数が有限の場合を考え, 具体的に Painlevé 方程式との対応を紹介する.

6 Painlevé 方程式との関係

独立変数が 4 系列 $t, \bar{t}, y, z$ あるが, ここで y, z をすべて 0 とおけば, 線形方程式 (40) は $\zeta = 0$ と $\zeta = \infty$ のみに特異点をもち, t_1, t_2 以外を 0 とすると Painlevé IV, $t_1, \bar{t}_1$ 以外を 0 とすると Painlevé III に付随する線形方程式となる [6], [8]. また t_1, t_3 以外を 0 とし, さら

に $\beta=0$ という制限条件をつけると Painlevé II に付随する, いわゆる Jimbo-Miwa 型の線形方程式が得られる. ちなみに Flashka-Newell 型の線形方程式 [4], [10] は, この階層とは両立しない時間発展により定義される変形 KdV 階層の相似簡約として得られる.

ここでは Painlevé V 型, VI 型方程式の構成を述べる.

6.1 Painlevé V

独立変数 t_1 と y_0, y_1 以外は 0 とする. このとき 線形方程式 (44) は

$$\zeta\frac{dY}{d\zeta} = \left(\zeta t_1 H_0 + \alpha H_0 + t_1 U_1 + y_1 C_1 + \frac{\zeta y_1}{y_0+\zeta y_1}(\gamma H_0 - y_1 C_1)\right)\Psi \tag{45}$$

となる. そこで (45) の係数行列を ζ で割ったものを $A_V(\zeta)$ と置く. すなわち

$$A_{\mathrm{V}}(\zeta) = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & -t_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\zeta}\left(\begin{bmatrix} \alpha & -2t_1 q \\ 2t_1 r & -\alpha \end{bmatrix} + y_1 C_1\right) + \frac{y_1}{y_0+\zeta y_1}(\gamma H_0 - y_1 C_1). \tag{46}$$

この線形方程式が Painlevé V に付随するものであることを 3 種の相似条件 (38), (39), (41), (42) により説明する.

- ζ, t, y に関する相似条件 (38) における ζ^{-1} の係数と y に関する相似条件 (41) 第 1 式の ζ^{-1} の係数に, W_1 の満たす方程式 (9) をあわせ

  $$W_1 = [W_1, \alpha H_0] + t_1 U_2 - y_1\frac{\partial W_1}{\partial y_1}, \qquad y_0\frac{\partial W_1}{\partial y_0} + y_1\frac{\partial W_1}{\partial y_1} = [\gamma H_0, W_1]$$

  という関係式を得る. これより y_1 微分が消去でき

  $$W_1 = [W_1, (\alpha+\gamma)H_0] + t_1 U_2 + y_0\frac{\partial W_1}{\partial y_0} \tag{47}$$

  となる. 成分で書けば次のような方程式になる.

  $$\begin{bmatrix} w & q \\ r & -w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t_1 qr & -2(\alpha+\gamma)q - t_1 q' \\ 2(\alpha+\gamma)r - t_1 r' & -2t_1 qr \end{bmatrix} + y_0\frac{\partial}{\partial y_0}\begin{bmatrix} w & q \\ r & -w \end{bmatrix}. \tag{48}$$

- $\bar{W}$ の満たす方程式 (39) の ζ^0 の係数より $\alpha H_0 G + t_1 U_1 G + y_1 C_1 G = \beta G H_0$ を得る. この両辺に右から G^{-1} をかけたものを成分で表すと

  $$G\begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix}G^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & -2t_1 q \\ 2t_1 r & -\alpha \end{bmatrix} - y_1\frac{\partial}{\partial y_0}\begin{bmatrix} w & q \\ r & -w \end{bmatrix} \tag{49}$$

  となり, (46) の $1/\zeta$ の係数の行列式が定数 $-\beta^2$ であることがわかる.

  このように相似条件の定数 $-\beta$ が $\zeta=0$ についてのモノドロミー指数となることは (10) 式より一般に成り立つ.

- y_n に関する相似条件の方程式 (41) の y_0 微分のみによる表示で, y_0, y_1 以外は 0 として得られる関係式は

$$\begin{cases} (y_0 + y_1\zeta)\dfrac{\partial W}{\partial y_0} + y_1 C_1 W = [\gamma H_0, W] \\ (y_0 + y_1\zeta)\dfrac{\partial \bar{W}}{\partial y_0} + y_1 C_1 \bar{W} = [\gamma H_0, \bar{W}] \end{cases} \tag{50}$$

となる. この第2式で $\bar{W}, \partial\bar{W}/\partial y_0$ がともに $\zeta = -y_1/y_0$ で正則だとして $\check{G} = \bar{W}(\zeta = -y_0/y_1)$ とおくと, $0 = \gamma H_0 \check{G} - \check{G}(\gamma H_0) - y_1 C_1 \check{G}$, すなわち

$$\check{G}\begin{bmatrix}\gamma & 0\\ 0 & -\gamma\end{bmatrix}\check{G}^{-1} = \begin{bmatrix}\gamma & 0\\ 0 & -\gamma\end{bmatrix} + y_1\frac{\partial}{\partial y_0}\begin{bmatrix} w & q\\ r & -w\end{bmatrix} \tag{51}$$

となり, (46) の $y_1/(y_0 + \zeta y_1)$ の係数の行列式が定数 $-\gamma^2$ であることがわかる.

このようにして Painlevé V 型方程式の, 神保・三輪による線形方程式が得られる. 論文 [5] では, 従属変数を

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{VJM}}(\zeta) =& \frac{1}{2}\begin{bmatrix} t & 0\\ 0 & -t\end{bmatrix} + \frac{1}{\zeta}\begin{bmatrix} z + \theta_0/2 & -u(z+\theta_0)\\ u^{-1}z & -z - \theta_0/2\end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{\zeta - 1}\begin{bmatrix} -z - (\theta_0 + \theta_\infty)/2 & uy[z + (\theta_0 - \theta_1 + \theta_\infty)/2] \\ -[z + (\theta_0 + \theta_1 + \theta_\infty)/2]/uy & z + (\theta_0 + \theta_\infty)/2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{52}$$

と定義しており, ここでの y が Painlevé V

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} =& \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} + \frac{(y-1)^2}{t^2}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_0 - \theta_1 + \theta_\infty}{2}\right)^2 y \right. \\ & \left. - \frac{1}{2y}\left(\frac{\theta_0 - \theta_1 - \theta_\infty}{2}\right)^2\right\} + \frac{(1 - \theta_0 - \theta_1)y}{t} - \frac{y(y+1)}{2(y-1)} \end{aligned}$$

を満たしている. そこで相似条件を課した係数行列 (46) で $y_0 = -1, y_1 = 1$ としたものを (52) と比較して, 神保・三輪の変数を $2+1$ NLS 方程式の変数 q, r, w で表すと

$$\begin{cases} t = 2t_1, \quad \theta_\infty = -2(\alpha + \gamma), \quad \theta_0 = -2\beta, \quad \theta_1 = -2\gamma, \\ z = \alpha + \beta - \dfrac{\partial w}{\partial y_0}, \quad u = \left(2t_1 q + \dfrac{\partial q}{\partial y_0}\right)\left(\alpha - \beta - \dfrac{\partial w}{\partial y_0}\right)^{-1} \\ y = -\dfrac{\partial q}{\partial y_0}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y_0}\right)^{-1}\left(\alpha - \beta - \dfrac{\partial w}{\partial y_0}\right)\left(2t_1 q + \dfrac{\partial q}{\partial y_0}\right)^{-1} \end{cases} \tag{53}$$

という対応になる. また, 論文 [5] の (C.43) 式で与えられるハミルトニアン H_{V} と, Painlevé V の σ-form と呼ばれる方程式 (ハミルトニアンが満たす方程式と同値なもの)

$$\begin{aligned} \left(t\frac{d^2\sigma}{dt^2}\right)^2 =& \left(\sigma - t\frac{d\sigma}{dt} + 2\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 - (2\theta_0 - \theta_\infty)\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 \\ & - 4\frac{d\sigma}{dt}\left(\frac{d\sigma}{dt} - \theta_0\right)\left(\frac{d\sigma}{dt} - \frac{\theta_0 - \theta_1 + \theta_\infty}{2}\right)\left(\frac{d\sigma}{dt} - \frac{\theta_0 + \theta_1 + \theta_\infty}{2}\right) \end{aligned} \tag{54}$$

を与える関数 $\sigma(t)$ は W_1 の対角成分 w (3) とほぼ一致し,

$$H_{\rm V} = -w + \gamma, \qquad \sigma(t) = -2t_1(w+\alpha+\beta) + (\alpha+\beta+\gamma)^2 - \gamma^2$$

となる. (53) を見るとわかるように, Painlevé V の解を与える関数はソリトン方程式の変数では意味がよくわからないが, ハミルトニアンに対応する関数は本質的に W_1 の対角成分 w であり, 相似条件のもとで w の満たす方程式は比較的容易に得られる. 実際, 相似条件で得られる関係式 (48) で, さらに $y_0 = -1$, $y_1 = 1$ とおくと,

$$w = 2t_1 qr - \frac{\partial w}{\partial y_0} = -t_1 w' - \frac{\partial w}{\partial y_0}. \tag{55}$$

となり (ここで関係式 (17) を用いた), さらに関係式 (49), (51) の行列式をとると

$$\left(\alpha - \frac{\partial w}{\partial y_0}\right)^2 - \beta^2 = 4t_1^2 qr + 2t_1\left(\frac{\partial q}{\partial y_0} r - q\frac{\partial r}{\partial y_0}\right) + \frac{\partial q}{\partial y_0}\frac{\partial r}{\partial y_0}, \tag{56}$$

$$\left(\gamma + \frac{\partial w}{\partial y_0}\right)^2 - \gamma^2 = -\frac{\partial q}{\partial y_0}\frac{\partial r}{\partial y_0} \tag{57}$$

となる. そこで $p := t_1 w$ と定義すると, (55) より

$$p' = w + t_1 w' = -\frac{\partial w}{\partial y_0}, \qquad p'' = -\frac{\partial w'}{\partial y_0} = 2\frac{\partial}{\partial y_0}(qr) = 2\left(\frac{\partial q}{\partial y_0} r + q\frac{\partial r}{\partial y_0}\right) \tag{58}$$

であり, (56), (57) における w の y_0 微分が消去でき,

$$2t_1\left(\frac{\partial q}{\partial y_0} r - q\frac{\partial r}{\partial y_0}\right) = \alpha^2 - \beta^2 + 2(\alpha+\gamma+t_1)p' - 2p \tag{59}$$

となる. ここで qr を消去するのに $p - t_1 p' = -t_1^2 w' = 2t_1^2 qr$ を用いた. (57), (58), (59) の 3 式より q, r の y_0 微分を消去することができ,

$$(t_1 p'')^2 = \left\{\alpha^2 - \beta^2 + 2(\alpha+\gamma+t_1)p' - 2p\right\}^2 + 8p'(p - t_1 p')(2\gamma - p') \tag{60}$$

という方程式が得られる. 右辺を整理しなおせば Painlevé V の σ-form (54) に同値な方程式であることはすぐにわかる.

6.2 Painlevé VI

今度は y_0, y_1, z_0, z_1 を残して他は 0 にする. このとき, 3 種の相似条件のもとで $Y = \Psi$, $\bar{\Psi}$ のみたす線形方程式 (44), (43) は

$$\zeta\frac{dY}{d\zeta} = \left(\alpha H_0 + y_1 C_1 + z_1 D_1 + \frac{y_1\zeta}{y_0 + y_1\zeta}(\gamma H_0 - y_1 C_1) + \frac{z_1\zeta}{z_0 + z_1\zeta}(\delta H_0 - z_1 D_1)\right) Y \tag{61}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y_0} = \frac{\gamma H_0 - y_1 C_1}{y_0 + y_1\zeta} Y, \qquad \frac{\partial Y}{\partial z_0} = \frac{\delta H_0 - z_1 D_1}{z_0 + z_1\zeta} Y \tag{62}$$

となる. そこで (61) の係数行列を ζ で割ったものを $A_{\mathrm{VI}}(\zeta)$ と名付ける.

$$A_{\mathrm{VI}}(\zeta)=\frac{\alpha H_0+y_1C_1+z_1D_1}{\zeta}+\frac{y_1(\gamma H_0-y_1C_1)}{y_0+\zeta y_1}+\frac{z_1(\gamma H_0-z_1D_1)}{z_0+\zeta z_1}. \tag{63}$$

(61) が Painlevé VI に付随する線形方程式となることを示す.

- 3つの相似条件より得られる W_1 の満たす方程式 (38), (41), (42) で y_1,y_0,z_1,z_0 以外は0とすると

$$W_1=[W_1,\alpha H_0]-y_1\frac{\partial W_1}{\partial y_1}-z_1\frac{\partial W_1}{\partial z_1}$$
$$y_0\frac{\partial W_1}{\partial y_0}+y_1\frac{\partial W_1}{\partial y_1}=[\gamma H_0,W_1],\qquad z_0\frac{\partial W_1}{\partial z_0}+z_1\frac{\partial W_1}{\partial z_1}=[\delta H_0,W_1]$$

となる. これより y_1,z_1 に関する微分を消去して次を得る.

$$W_1=[W_1,(\alpha+\gamma+\delta)H_0]+y_0\frac{\partial W_1}{\partial y_0}+z_0\frac{\partial W_1}{\partial z_0} \tag{64}$$

- $t,\bar{t},y,z$ に関する相似条件より得られる G のみたす関係式 (39) より

$$\alpha H_0+y_1C_1+z_1D_1=G(\beta H_0)G^{-1} \tag{65}$$

となる. この両辺の行列式をとれば, $A_{\mathrm{VI}}(\zeta)$ (63) の $1/\zeta$ の係数の行列式が $-\beta^2$ だとわかる.

- さらに, $\bar{W}$ の y_n と z_n に関する相似条件 (41), (42) で, y_0,y_1,z_0,z_1 以外は 0 として得られる関係式は, (50) と

$$\begin{cases}(z_0+z_1\zeta)\dfrac{\partial W}{\partial z_0}+z_1D_1W=[\delta H_0,W]\\[2mm](z_0+z_1\zeta)\dfrac{\partial \bar{W}}{\partial z_0}+z_1D_1\bar{W}=[\delta H_0,\bar{W}]\end{cases} \tag{66}$$

である. この場合も $\bar{W}$ が $\zeta=-y_0/y_1,-z_0/z_1$ で正則だとすれば(51) と $\hat{G}(\gamma H_0)\hat{G}^{-1}=\gamma H_0-y_1C_1$, $\hat{G}:=\bar{W}(\zeta=-z_0/z_1)$, すなわち

$$\hat{G}\begin{bmatrix}\gamma & 0\\ 0 & -\gamma\end{bmatrix}\hat{G}^{-1}=\begin{bmatrix}\gamma & 0\\ 0 & -\gamma\end{bmatrix}+y_1\frac{\partial}{\partial y_0}\begin{bmatrix}w & q\\ r & -w\end{bmatrix} \tag{67}$$

が得られ, $A_{\mathrm{VI}}(\zeta)$ (61) の $y_1/(y_0+\zeta y_1)$, $z_1/(z_0+\zeta z_1)$ の係数行列の行列式が, それぞれ定数 $-\gamma^2$, $-\delta^2$ であることがわかる.

そこで $y_0=-1,y_1=z_1=1$ とおき神保・三輪による線形方程式 (論文 [6] の (C.47), (C.57) 式) と (63) を比較すれば, Painlevé VI の独立変数は $-z_0$, 従属変数 y とハミルトニアン $H_{\mathrm{VI}}=t(t-1)\hat{\sigma}$ は

$$y=-z_0+\frac{z_0(z_0+1)}{1+2(\alpha+\gamma+\delta)}\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial z_0},$$
$$\hat{\sigma}=-2(\alpha+\gamma+\delta)w+2t\delta(\alpha+\beta+2\gamma)-2\delta(\alpha+\beta)-\alpha^2+\beta^2$$

となることがわかる．ここでもハミルトニアンが，ほぼ W_1 の対角成分 w と一致している．

この場合も自己相似条件のもとで w に関する閉じた方程式を求めると次のようになる．まず (64) の上に述べた関係式より w の y_0 微分，y_1 微分，z_1 微分は w の z_0 微分で表すことができ

$$\frac{\partial w}{\partial y_0} = \frac{\partial w}{\partial y_1} = -w + z_0\frac{\partial w}{\partial z_0}, \qquad \frac{\partial w}{\partial z_1} = -z_0\frac{\partial w}{\partial z_0}$$

となる．よって ASDYM 方程式 (32) を z_0 微分のみで表すことができ，

$$z_0(1+z_0)\frac{\partial^2 w}{\partial z_0^2} = \frac{\partial q}{\partial y_0}\frac{\partial r}{\partial z_0} - \frac{\partial q}{\partial z_0}\frac{\partial r}{\partial y_0} \tag{68}$$

を得る．さらに行列式についての関係式 (65), (51), (67) より得られる

$$\left(\alpha - \frac{\partial w}{\partial y_0} - \frac{\partial w}{\partial z_0}\right)^2 - \beta^2 = -\left(\frac{\partial q}{\partial y_0} + \frac{\partial q}{\partial z_0}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y_0} + \frac{\partial r}{\partial z_0}\right)$$
$$\left(\gamma + \frac{\partial w}{\partial y_0}\right)^2 - \gamma^2 = -\frac{\partial q}{\partial y_0}\frac{\partial r}{\partial y_0}, \qquad \left(\delta + \frac{\partial w}{\partial z_0}\right)^2 - \delta^2 = -\frac{\partial q}{\partial z_0}\frac{\partial r}{\partial z_0},$$

に (68) を代入して

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial y_0}\frac{\partial r}{\partial z_0} - \frac{\partial q}{\partial z_0}\frac{\partial r}{\partial y_0} =& z_0(1+z_0)\frac{\partial^2 w}{\partial z_0^2} \\
\frac{\partial q}{\partial y_0}\frac{\partial r}{\partial z_0} + \frac{\partial q}{\partial z_0}\frac{\partial r}{\partial y_0} =& \left(-w + z_0\frac{\partial w}{\partial z_0}\right)\left(2\gamma - w + z_0\frac{\partial w}{\partial z_0}\right) + \frac{\partial w}{\partial z_0}\left(2\delta + \frac{\partial w}{\partial z_0}\right) \\
& - \left(\alpha - \beta - \frac{\partial w}{\partial z_0} + w - z_0\frac{\partial w}{\partial z_0}\right)\left(\alpha + \beta - \frac{\partial w}{\partial z_0} + w - z_0\frac{\partial w}{\partial z_0}\right) \\
\frac{\partial q}{\partial y_0}\frac{\partial r}{\partial y_0}\frac{\partial q}{\partial z_0}\frac{\partial r}{\partial z_0} =& \frac{\partial w}{\partial z_0}\left(-w + z_0\frac{\partial w}{\partial z_0}\right)\left(2\gamma - w + z_0\frac{\partial w}{\partial z_0}\right)\left(2\delta + \frac{\partial w}{\partial z_0}\right)
\end{aligned}$$

これより q, r の y_0, z_0 に関する微分は消去できる．

$$A := \alpha - \beta - \frac{\partial w}{\partial z_0} + w - z_0\frac{\partial w}{\partial z_0}, \qquad B := -w + z_0\frac{\partial w}{\partial z_0}, \qquad C := \frac{\partial w}{\partial z_0},$$

とおけば

$$\begin{aligned}
\left(z_0(1+z_0)\frac{\partial^2 w}{\partial z_0^2}\right)^2 =& \{B(B+2\gamma) + C(C+2\delta) - A(A+2\beta)\}^2 - 4BC(B+2\gamma)(C+2\delta) \\
=& \{B(B+2\gamma) - C(C+2\delta) + A(A+2\beta)\}^2 - 4AB(A+2\beta)(B+2\gamma) \\
=& \{B(B+2\gamma) - C(C+2\delta) - A(A+2\beta)\}^2 - 4AE(A+2\beta)(C+2\delta)
\end{aligned}$$

となり，変数 w で表せばみかけの異なる方程式になる．

7 特殊解の構成と行列積分

論文 [7] でも紹介しているように，ASDYM 階層における Rimann-Hilbert 分解を用いる特殊解の構成法は，ソリトン方程式の変数 $t, \bar{t}$ による時間発展 (8) を加えてもそのまま実行できる．そこで特に

$$\frac{\partial g}{\partial t_n} = H_n g - g H_n, \quad \frac{\partial g}{\partial \bar{t}_n} = H_{-n} g - g H_{-n}, \quad \frac{\partial g}{\partial y_n} = \zeta^n \frac{\partial g}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial g}{\partial z_n} = \zeta^n \frac{\partial g}{\partial z_0}$$

を満たすような 2×2 行列 $g = g(\zeta; t, \bar{t}, y, z)$ で，$g = \begin{bmatrix} \zeta^N & f(\zeta; t, \bar{t}, y, z) \\ 0 & \zeta^{-N} \end{bmatrix}$ という形のものを考え Riemann-Hilbert 分解 $g = W(\zeta; t, \bar{t}, y, z)^{-1} V(\zeta; t, \bar{t}, y, z)$ を行えば，この W は Sato-Wilson 方程式 (8), (20) をみたすことがわかる (Atiyah-Ward 仮設解 [2])．特に g を上のような形にとり，その 12 成分を $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \zeta^{-n}$ とすれば，従属変数 W_1 は行列式で表示され，f を特別な関数とすることにより $2+1$ 次元 NLS 階層の N ソリトン解が得られる．ソリトン解のある種の極限は自己相似条件を見たすので，こうして w のみたす方程式 (Painlevé 方程式の σ-form) の特殊解が得られるが，これは Tracy-Widom による Painlevé 方程式の行列積分解 [13] に一致している．詳しいことはまた別の機会に述べることにする．

参考文献

[1] Ablowitz M. J.; Kaup D. J.; Newell A. C.; Segur H.: Nonlinear evolution equations of physical significance, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 125–127 (1973).

[2] Corrigan, E. F.; Fairlie, D. B.; Yates, R. G.; Goddard, P.: The construction of self-dual solutions to SU(2) gauge theory, *Comm. Math. Phys.* **58** (1978), 223–240.

[3] Dickey, L. A.: *Soliton equations and hamiltonian systems, second edition*, Advanced Series in Mathematical Physics – Vol. 26, World Scientific, 2003.

[4] Flaschka, H.; Newell, A. C.: Monodromy- and spectrum-preserving deformations. I, *Comm. Math. Phys.* **76** (1980), 65–116.

[5] Jimbo, M.; Miwa, T.: Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II, *Physica D* **2** (1981), 407–448.

[6] Jimbo, M..; Miwa, T.: Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. III, *Physica D* **4** (1981), 26–46.

[7] Kakei, S.; Ikeda, T.; Takasaki, K.: Hierarchy of (2 + 1)-Dimensional Nonlinear Schrodinger Equation, Self-Dual Yang-Mills Equation, and Toroidal Lie Algebras, *Annales Henri Poincare* **3** (2002), 817-845.

[8] Kakei, S.; Kikuchi, T.: Affine Lie group approach to a derivative nonlinear Schrödinger equation and its similarity reduction, *Internat. Math. Res. Not.* **78** (2004), 4181–4209.

[9] Mason, L. J.; Woodhouse, N. M. J.: *Integrability self-duality, and twistor theory*, Oxford, 1996.

[10] Noumi, M.; Yamada, Y.: Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$, *Funkcial. Ekvac.* **41** (1998), 483–503.

[11] Okamoto, K.: Isomonodromic deformation and Painlevé equations, and the Garnier system, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math.* **33** (1986), 575–618.

[12] 高崎金久: 可積分系の世界—戸田格子とその仲間—共立出版, 2001 年

[13] Tracy, C. A.,; Widom, H.: Fredholm determinants, differential equations and matrix models *Comm. Math. Phys.* **163** (1994) 33–72.

[14] Ueno, K.; Takasaki, K.: Toda lattice hierarchy, *Adv. Stud. in Pure Math.* **4** (1984), 1-95.